УДК 004.896

К.Ю. Мелкумян

ВИБІР УДОСКОНАЛЕНОГО МЕТОДУ ПЛАНУВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ МАНІПУЛЯТОРА

Вступ

Проблема створення автономних мобільних роботів з бортовими обчислювальними засобами для виконання наперед заданого набору задач дуже актуальна в сучасному світі. Причому до математичних, алгоритмічних та програмних засобів пред'являються дуже високі вимоги тому, що основною науково-технічною задачею сьогодення залишається мініатюризація. Саме тому багато уваги приділяється знаходженню таких математичних методів обчислення, завдяки яким стає можливим зменшити місце в пам'яті бортового процесора для розташування програми.

Основні положення

Інтелектуальний мобільний робот-маніпулятор (ІМР) – це багатоланковий механізм з елементами штучного інтелекту (ШІ), що рухається за допомогою комплексу пневмо-, гідро- або електроприводів

Для побудови траєкторії багатоланкового маніпулятора використовується поняття сплайну. Традиційною сферою застосування сплайнів в інженерній практиці стали системи автоматизованого проектування та комп'ютерної графіки.

Сплайном називають функцію, яка на кожному відрізку інтерполяції є алгоритмічним многочленом, а на всьому заданому відрізку безперервна разом з декількома своїми похідними. Назва такого роду кривих походить від англійського слова *spline* – гнучка лінійка, що використовується креслярами для проведення ліній. Це зв'язано з тим, що якщо на площині відмітити табличні точки і розмістити гнучку лінійку ребром до площини так, щоб вона була зафіксована в цих точках, то лінійка набере форми, що мінімізує її потенційну енергію. Сплайнам також притаманна універсальність та гнучкість в задачах інтерполяції та апроксимації.

Інтерполяція це відшукання проміжних значень багаточлена $\varphi(x)$, який набирає у заданих точках x_i ті самі значення y_i, що і вихідна функція $f(x)$, тобто

$$\varphi(x_i) = y_i, i = 0, 1, \ldots, n, x_0 = a, x_n = b. \tag{1}$$

При цьому вважається, що серед значень x_i немає однакових, тобто $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Точки x_i називають *вузлами інтерполяції*, многочлен $\varphi(x)$ – *інтерполяційним многочленом*.

Таким чином, особливістю інтерполяції є те, що апроксимуючий многочлен $\varphi(x)$ проходить через табличні точки, а в інших точках підрізка

$[a, b]$ відображає функцію $y = f(x)$ з деякою точністю. Якщо один і той самий многочлен ступеню n інтерполює $f(x)$ на усьому відрізку $[a, b]$, то говорять про глобальну інтерполяцію.

Апроксимація, або *наближення* – науковий метод, що полягає в заміні одних об'єктів іншими, у тому або іншому змісті близькими до вихідних, але більш простими. Апроксимація дозволяє досліджувати числові характеристики і якісні властивості об'єкту, зводячи завдання до вивчення більш простих або більш зручних об'єктів. В даному випадку це використання відносно нескладних формул апроксимації функції для наближеного визначення її значень у проміжних точках замість того, щоб проводити надто дорогий експеримент для розширення таблиці значень функції $y = f(x)$.

Постановка задачі

В роботі розглядаються методи побудови траєкторії руху маніпулятора для підбору оптимальних параметрів ланок на рівні комп'ютерного імітаційного моделювання для задач функціонування в обмежених просторових умовах шахти. Вирішення цієї задачі є актуальним для проблеми розвідки в шахтному забої чи проведення ремонтних робіт у вузькому приміщенні інженерної споруди [1].

Типовий приклад: розвідка інтер'єру інженерної споруди після аварії, коли виникає додаткова проблема обстеження принципової зміни інтер'єру (ще до аварії) стислого робочого приміщення та невідома нова конфігурація можливих проходів.

Таким чином перед ІМР поставлено багатокомпонентну задачу, що складається з взаємопов'язаних часткових задач:

1) проникнути всередину;

2) побудувати 3D карту “оновленої” місцевості;

3) прийняти необхідну форму для виконання поставленої задачі;

4) відшукати та захватити (або включити /виключити) потрібний предмет.

Метою імітаційного моделювання є прорахування ряду типових прикладів-ситуацій для вибору кількості ланок, їх довжини та кутів орієнтації системи управління маніпулятора, а також навчання користувачів роботі з цим пристроєм.

Імітаційне моделювання передбачає вирішення таких задач:

- визначення траєкторії руху захвату маніпулятора (за допомогою сплайн-функцій), якщо конфігурація тунелю наперед відома;
- реалізація руху захвату маніпулятору за побудованим сплайном. Під час переміщення ланцюгів маніпулятору та його захвату потрібно дотримуватись побудованої траєкторії, що проходить в центрі тунелю;
- пошук оптимальної довжини сегментів маніпулятора;
- реалізація руху захвату маніпулятора за методом перевірки зіткнень “сфери безпеки” з поверхнями тунелю на кожному кроці. Якщо зіткнення відбулося, тоді здійснюється поворот сегменту маніпулято-

ра. Цей метод використовується коли конфігурація тунелю наперед невідома;

- визначення кутів орієнтації шарнірів на кожному кроці.

Методи побудови траєкторії на основі кубічних сплайнів

Далі наведено порівняння трьох алгоритмів для відновлення гладкої просторової траєкторії відповідних елементів ІМР крізь тунель в стисломy, вузькому просторі, типу аварійного штреку шахти після обвалу порід.

Для проникнення у вузький прохід завалів на основі відео розвідки потрібна адаптація конструкції маніпулятора робота, а саме вибір числа ланцюгів маніпулятору. Розгляду цієї задачі буде присвячена окрема публікація.

Метод 1. Кубічна сплайн-інтерполяція.

В даному методі треба розв’язати СЛАР розмірності лише $(n-2)$ відносно других похідних сплайну у внутрішніх вузлах таблиці.

Кубічні поліноми, що утворюють сплайн, шукаємо у вигляді:

$$S_i\left(x\right) = a_i + b_i\left(x - x_i\right) + c_i\left(x - x_i\right)^2 + d_i\left(x - x_i\right)^3, x \in \left[x_i, x_{i+1}\right], i = 1, 2, \ldots n-1. \tag{2}$$

Похідні сплайну:

$$S_i^I\left(x\right) = b_i + 2c_i\left(x - x_i\right) + 3d_i\left(x - x_i\right)^2, S_i^{II}\left(x\right) = 2c_i + 6d_i\left(x - x_i\right).$$

Для знаходження коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, d_i, запишемо, як і в попередньому випадку, умови інтерполяції та диференціювання:

$$S_i\left(x_i\right) = y_i, S_i\left(x_{i+1}\right) = y_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$S_i^I\left(x_{i+1}\right) = S_{i+1}^I\left(x_{i+1}\right), S_i^{II}\left(x_{i+1}\right) = S_{i+1}^{II}\left(x_{i+1}\right) i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Доповнивши одержані рівняння двома крайовими умовами наступного вигляду:

$$S_1^{II}\left(x_1\right) = 0, S_{n-1}^{II}\left(x_n\right) = 0. \tag{3}$$

Одержуємо систему з $4n-4$ рівнянь. Якщо виключити деякі невідомі, її можна легко спростити. Запишемо систему докладніше, позначивши крок $h_i = x_{i+1} + x_i$:

$$a_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-2, \tag{6}$$

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-2, \tag{7}$$

$$c_1 = 0, \tag{8}$$

$$2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 0. \tag{9}$$

Знайдемо із (7) та (9) величини d_i:

$$d_i = \frac{2c_{i+1} - 2c_i}{6h_i} = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, i = 1, \ldots, n-2, d_{n-1} = \frac{-c_{n-1}}{3h_{n-1}} \tag{10}$$

Підставляємо d_iта a_i в (5):

$$y_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^3 = y_{i+1}, i = 1, \ldots, n-2,$$

$$y_{n-1} + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 + \frac{c_{n-1}}{3h_{n-1}} h_{n-1}^3 = y_n.$$

З цих двох співвідношень виражаємо b_i:

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3} h_i, i = 1, \ldots, n-2, \tag{11}$$

$$b_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{2}{3} c_{n-1} h_{n-1}.$$

Нарешті в (6) підставляємо одержаний вираз b_iта d_iчерез c_i:

$$\begin{gathered} \tfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \tfrac{c_{i+1} + 2c_i}{3} h_i + 2c_i h_i + 3\tfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^2 = \\ = \tfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \tfrac{c_{i+2} + 2c_{i+1}}{3} h_{i+1}, i = 1, \ldots, n-3, \end{gathered}$$

$$\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{c_{n-1} + 2c_{n-2}}{3} h_{n-2} + 2c_{n-2}h_{n-2} + 3\frac{c_{n-1} - c_{n-2}}{3h_{n-2}} h_{n-2}^2 =$$

$$= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{2}{3} c_{n-1} h_{n-1}.$$

Одержуємо систему $n-2$ рівнянь відносно величин $C_i (i = 1, \ldots, n-1)$. Оскільки із (8) $C_1 = 0$, то кількість невідомих збігається з кількістю рівнянь. Після нескладних перетворень система набирає вигляду:

$$\begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \\ & & \cdots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_{n-2} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

де $\gamma_i = 3\left[\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right]$.

Таким чином, для побудови сплайну у вигляді (2) необхідно :

1. Розв’язавши систему (12), знайти величини $c_2, \ldots, c_{n-1}$. Взяти $c_1 = 0$.
2. За формулами (10) обчислити $d_1, \ldots, d_{n-1}$.

 ISSN 1562-9945

3. За формулами (11) обчислити $b_1, \ldots, b_{n-1}$.

4. Взяти $a_i = y_i, i = 1, \ldots, n-1$..

За коефіцієнтами сплайну, побудованого у такому вигляді, можна легко оцінити його похідні у вузлах таблиці:

$$b_i = S_i^I\left(x_i\right), c_i = \frac{S_i^{II}\left(x_i\right)}{2} i = 1, \ldots, n-1.$$

Метод 2. Сплайн Алберга, Нельсона, Уолша.

Цей метод більш детально розглядається в попередній роботі [2].

Посилаючись на [3], маємо деяку матрицю розмірності N, значення для x та y при i = $0 \ldots N$. Позначимо крок, як $h_k = x_k - x_{k-1}$ для $k = 1 \ldots N-1$. Для того щоб знайти значення функції $S_{\Delta k} = ax^3 + bx^2 + cx + d$, де $k = 1 \ldots N-1$ виконаємо наступні дії:

1. Заповнюємо матрицю розмірності NxN значеннями

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & \lambda_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_N & 2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

де $\lambda_j = h_{j+1}\left(h_j + h_{j+1}\right)^{-1}$, $\mu_j = h_j\left(h_j + h_{j+1}\right)^{-1}$, $i = \overline{0, N}$

Для λ_0 та μ_Nотримати значення з даних формул неможливо.

2. Виходячи з: $\sum\limits_{j=0}^{M} A_{ij} M_j = d_j$, $i = \overline{0, N}$, $A_{ij} \equiv A_{ij}\left(\lambda_0, \mu_N; N, \Delta\right)$, знаходимо значення для

$$d_k = \frac{6}{h_k + h_{k+1}}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right), \text{ де } k = 1 \ldots N-1 \tag{14}$$

Для рівномірної сітки:

$$d_k = \frac{3}{2} \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \tag{15}$$

3. Знаходимо зворотну матрицю A^{-1}.

4. Знаходимо M_k, де $k = 1..N-1$. Виходячи з того, що $M = A^{-1} \cdot D$:

$$M_k = \sum_{i=0}^{N-2} a_{k,j}^{-1} \cdot d_k \tag{16}$$

5. Знаходимо M_0 та M_N за формулою:

$$M_j + \frac{2}{h_2 + h_3}\left(\frac{M_{j-1} h_j + M_j h_j}{6}\right) = \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}}\right) \cdot \left(\frac{-2}{h_2 + h_3}\right) \tag{17}$$

Для M_0 беремо $j = 1$, для M_N беремо $j = N - 1$.

6. Знаходимо коефіцієнти потрібної нам функції на всіх інтервалах та будуємо сплайн, який має вигляд багаточлену:

$$S_{\Delta k} = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ де } k = 1 \dots N - 1 \tag{18}$$

Коефіцієнти:

$$a = \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}, \tag{19}$$

$$b = \frac{M_{j-1}x_j - M_j x_{j-1}}{2h_j}, \tag{20}$$

$$c = \frac{M_j x_{j-1}^2 - M_{j-1}x_j^2}{2h_j} + \frac{(M_{j-1} - M_j)h_j}{6} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}, \tag{21}$$

$$d = \frac{M_{j-1}x_j^3 - M_j x_{j-1}^3}{6h_j} + \frac{(M_j x_{j-1} - M_{j-1}x_j)h_j}{6} + \frac{y_{j-1}x_j - y_j x_{j-1}}{h_j}. \tag{22}$$

Для спрощення розрахунку п’ятого пункту пропонується використовувати наступні формули обчислення M_0 та M_N. Виходячи з:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \tag{23}$$

Отримуємо:

$$M_{i-1} = \frac{d_i - 2M_i - \lambda_i M_{i+1}}{\mu_i} \tag{24}$$

$$M_{i+1} = \frac{d_i - 2M_i - \mu_i M_{i-1}}{\lambda_i} \tag{25}$$

З (24) розраховуємо M_0 для $i = 1$:

$$M_0 = \frac{d_1 - 2M_1 - \lambda_1 M_2}{\mu_1} \tag{26}$$

З (25) розраховуємо M_N для $i = n - 1$:

Метод 3. Вдосконалений метод [4].

Очевидно, що для обчислення моментів $\{M_j\}_0^N$ у попередньому методі застосовується відомий метод прогонки. Даний метод є вдосконаленням попереднього, дозволяє при оптимізації кінцевих умов для вирішення задачі згладжування опуклими сплайнами отримати явне представлення елементів A^{-1}розмірності $N \times N$ через елементи аналогічних матриць менших розмірностей $N_1 \times N_1$ та $N_2 \times N_2$, при чому $N_1 + N_2 = N + 1$.

Послідовне застосування цього методу декілька разів дозволяє звести задачу перетворення трьох діагональної матриці A вищої розмірності до більш простої задачі про перетворення однієї чи двох матриць меншої розмірності, спираючись на лему.

 ISSN 1562-9945

Лема 1 дозволяє від представлення моментів деякого кубічного сплайну з матрицею A загального вигляду (відповідно до кінцевих умов) перейти до єдиного представлення тих самих моментів через рішення системи:

$$\sum_{j=0}^{N} \tilde{A}_{ij} M_j = \tilde{d}_i, i = \overline{0, N} \tag{27}$$

з новою більш простою матрицею $\tilde{A}_{ij} = A_{ij}(\lambda_0 = 0, \mu_N = 0; N, \Delta)$ та новим вектором $\tilde{d}_i$ виду:

$$\tilde{d}_i = \begin{cases} 2M_0, \quad i = 0, \\ d_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ 2M_N, \quad i = N, \end{cases} \tag{28}$$

Ця матриця $\tilde{A}$ відповідає частим кінцевим умовам та забезпечує існування достатньо ефективного алгоритму побудови оберненої матриці A^{-1} за допомогою простих точних формул з явним представленням для всіх моментів.

Висновки

В роботі наведено порівняння трьох алгоритмів для відновлення гладкої просторової траєкторії відповідних елементів ІМР, які використовують кубічні сплайни. Третій має зменшену кількість операцій розрахунку без зниження точності за рахунок скорочення кількості кроків прогону матриці в два рази. Метод дозволяє записати алгоритм керування кутами шарнірів маніпулятору на бортовий комп'ютер системи управляння інтелектуальним роботом.

Іншими словами, під час тестування на етапі імітаційного моделювання було з'ясовано, що відпрацювання вдосконаленого методу потребує меншу кількість тактів для виконання, що дає підстави стверджувати про його спрощеність та рекомендувати до використання елементом САПР створення багатоланкових роботів - маніпуляторів, зокрема малогабаритних, здатних за рахунок комбінованої взаємодії ланок в часі і просторі рухатися вздовж траєкторії, забезпечуючи мінімальне відхилення від оптимальної ідеально-гладкої кривої.

Литература

1. Писаренко В.Г., Писаренко Ю.В. Актуальные направления развития интеллектуализированной робототехники для снижения аварийности на шахтах // Искусственный интеллект. – 3. – 2009. – С. 308-316.
2. Мелкумян Е.Ю. Восстановление гладкой пространственной траектории ответственных элементов робототехнических комплексов путем сплайн-интерполяции // Адаптивные системы автоматического управления. -2009.- . 15(35).-С.

3. Алберг Дж., Нельсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир. – 1972. – 316 с.

4. Писаренко В.Г. Об интерполяции со сглаживанием выпуклыми кубическими сплайнами при оптимизации концевых условия // Сборник “физика и механика нелинейных явлений”. – К.: “Наукова думка”. – 1976. – С. 10-18.

Отримано 25.02.2010 р.